Příklady z logiky pro nelogiky*

Marie Benediktová

Katedra logiky Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze
e-mail: marie.benediktova@gmail.com

Abstrakt

V příspěvku se budeme zabývat klasickou výrokovou logikou. Zaměříme se přitom na funkci logiky jakožto základu matematického a filozofického myšlení s důrazem na všeobecnou vzdělanost. S důrazem na zvládnutí problémových pojmů klasické výrokové logiky budeme postupovat na několika úrovních: ukážeme typické jednoduché příklady klasické výrokové logiky a na nich budeme demonstrovat různé metody jejich řešení, a to jak v syntaxi (formální důkaz, věta o dedukci), tak i v sémantice (tabulková metoda, normální formy), a jejich propojení (věta o úplnosti a korektnosti). Příklady představíme prostřednictvím nových výukových prostředků, interaktivního webového projektu TRIAL (http://trial.kma.zcu.cz) a matematického softwaru MATHEMATICA.

1 Úvod

K poznání a určení pravdy je v matematice i v analytické filozofii stěžejním nástrojem důkaz. Důkaz a pravda jsou dva nejdůležitější pojmy matematické a filozofické logiky a jejich propojení je velice důležité a užitečné. Jejich pomocí vzniká most mezi světem syntaxe s (fiktivními) entitami a světem sémantiky s konkrétními věcmi. Ve filozofii je toto spojení pouze jedním z mnoha možných přístupů k uchopení pojmů a existujících věcí, podobně jako jmen či nás samých.

Snahou logika i matematika je tříbit a podporovat ve studentech, stejně jako v sobě, logické myšlení. K tomu, abychom si ve výuce zjednodušili co nejvíce situaci, nám slouží různé didaktické prostředky. Cílem

* Autorka je podporována grantovým projektem FRVŠ 212/2006/G5 Multimediální učební text příkladů „Logika (nejen) pro nelogiky“.

příspěvku je rovněž v odstavci 3.4 představit tyto nástroje. Nám všem jde především o to, abychom přesvědčili studenty i sami sebe, že logika je oprávněným základem matematiky i analytické filozofie. K tomu nás vedou nesporně dva důvody. Z pohledu matematiky každé poznání rozšiřující tvrzení má tvar implikace. Na druhou stranu logická argumentace je nutnou součástí analytické filozofie.

V odstavci 2 se zaměříme na problémy při výuce logiky nebo logických oblastí v matematice s důrazem na výrokovou logiku. V odstavci 4 představíme vzorové příklady, které tak dokreslí problematiku odstavce 2 a ve kterých budeme využívat jak klasické nástroje, shrnuté v odstavcích 3.1 a 3.2, tak i vlastní prostředky softwaru MATHEMATICA z odstavce 3.4.

2 Problémové pojmy z výrové logiky

Ve výuce logiky pro nelogiky, ať už humanitního nebo technického směru, se setkáváme s následujícími partiemi, které studentům činí potíže.

- nezaměňovat implikaci s ekvivalencí,
- znegovat daný výrok,
- rozhodnout, zda daný úsudek je, či není platný.

Víme, že implikace $p \to q$ není pravdivá, pokud antecent p je pravdivý a konsequent q nepravdivý, jinak je pravdivá. Zatímco ekvivalence $p \leftrightarrow q$ je pravdivá, pokud její obě strany p i q mají stejné pravdivostní hodnoty.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	**1**	**1**
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	**1**	**0**
1	0	0
1	1	1

Jak je vidět, první a poslední řádek potíže nedělá, protože je pro implikaci i ekvivalenci shodný. Potíže nedělá ani třetí řádek, protože ten je případě implikace definiční. Problémy dělá právě jediný odlišný řádek, který je zde zvýrazněn. A z něj rovněž pramení tak častá záměna implikace s ekvivalencí a velké údivy při výuce matematiky nad tím, že *obrácená implikace neplatí.*

V případě negování výroku na verbání úrovni se zdá, že lépe lze pochopit negování konjukce či disjunkce (de Morganova pravidla) než negování implikace, která vyžaduje „nepochopitelný" a téměř magický přechod ke konjunkci (viz příklad 1). Častou chybou je rovněž uvažování, že negovaná implikace je implikace obrácená.

Úsudek může být pro studenty problematický ze dvou důvodů. Jednak tehdy, když úsudek není platný, tj. závěr nevyplývá z premis, ale také v případě, kdy premisy jsou vnitřně sporné, ať už jen některá, nebo dokonce všechny, anebo jejich konjunkce (viz příklad 6). A samozřejmě náročná je i rezoluční metoda, vyžadující hypotetické uvažování neplatnosti závěru s cílem dospět do sporu s platnými premisami (viz příklad 7). Rovněž bývá problematické usoudit na správnost úsudku s absurdními předpoklady (viz příklad 7).

3 Metody

Mezi klasické výukové prostředky patří tabule, křída, případně fixy či promítání fólií, to vše má za následek ospalost studentů i samotného vyučujícího. Nicméně jsou zřejmě nutné k tomu, abychom představili metody klasické výrokové logiky důkladně a efektivně. Abychom mohli tyto metody procvičit, osvojit si je, a tím je i pochopit, můžeme již vedle tužky a papíru používat různých softwarů či webových aplikací. Trial či Mathematica patří právě mezi ně (více viz odstavec 3.4).

3.1 Syntax

Víme, že definice logických spojek není nikterak vázána na pojem pravdy, ale pouze na formální důkaz či dedukci. Zhruba řečeno:

Dokazatelné je to, co můžeme odvodit z jazyka, „udělat" přímo v jazyce.

Jazykem výrokové logiky přitom rozumíme množinu výrokových proměnných $p, q, r, \ldots$, výrokových spojek $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ a pomocných symbolů (závorek).

K tomu, abychom mohli důkaz zkonstruovat, musíme mít výchozí soustavu axiomů (níže uvádíme například vybraná schemata Hilbertova kalkulu (A1), (A2), ...) a odvozovací pravidlo *modus ponens* (MP):

$$
\begin{array}{ll}
\text{(A1)} & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), \\
\text{(A2)} & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)), \\
\vdots & \\
\text{(MP)} & \varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi.
\end{array}
$$

Formální důkaz formule φ je konečná posloupnost formulí, které jsou axiomem, prvkem množiny předpokladů Σ anebo které dostaneme pomocí modu ponens. Zapisujeme

$$\Sigma \vdash \varphi.$$

K odvozování (dedukci) se přitom používá

Věta o dedukci. *Předpokládejme, že Σ je množina formulí a φ, ψ jsou libovolné formule. Potom*

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Ukázku důkazu podáváme v příkladech 3 a 5.

3.2 Sémantika

Ústřední pojmy sémantiky jsou pravda a vyplývání.

Pravda je to, jak se věci mají.

To, zda daná formule daného jazyka je pravdivá, či nikoli, závisí pouze na tom, jak interpretujeme atomické formule, které se ve formuli nacházejí. Pomocí pravdivostních hodnot pravda/nepravda lze analyzovat, zda složitá formule je, či není pravdivá. To je principem i tabulkové metody – „rozbít" složitou formuli na atomické formule, které jsou spojeny spojkami; atomické formule ohodnotit a přes pravdivostní tabulky výrokových spojek „poskládat" výslednou pravdivostní hodnotu původní formule.

Zavádíme tak pojmy splnitelné formule, tautologie a kontradikce.

Řekneme, že formule je *splnitelná*, pokud existuje pravdivostní ohodnocení, při kterém je pravdivá. Pokud je formule splnitelná při libovolném pravdivostním ohodnocení, říkáme, že se jedná o *tautologii*. Pokud neexistuje žádné pravdivostní ohodnocení, při kterém by formule byla pravdivá, jde o *kontradikci*.

Formule φ *vyplývá* z množiny předpokladů Σ, jestliže φ je pravdivá při každém pravdivostním ohodnocení, které přiřazuje pravdu všem formulím v Σ. Píšeme pak $\Sigma \models \varphi$.

Přes pojem literálu (atomická formule nebo její negace) zavádíme pojmy (úplné) konjuktivní normální formy a (úplné) disjunktivní normální formy. A to proto, že platí následující věta.

Věta. *Každou formuli, která není kontradikcí, lze vyjádřit ve tvaru úplné disjunktivní normální formy. Každou formuli, která není tautologií, lze vyjádřit ve tvaru úplné konjunktivní normální formy.*

Sémantiku zastupují příklady 4 a 5.

3.3 Propojení syntaxe a sémantiky

Cítíme, že v jistém smyslu

pravda a důkaz jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci, bijekci.

Patrně pokud máme formuli φ dokázanou z množiny premis Σ, pak φ vyplývá ze Σ, neboli naše myšlení je korektní, správné. Platí také konverze: pokud φ výplývá ze Σ, pak existuje důkaz φ ze Σ, neboli vše, co je pravdivé, lze ve výrokové logice dokázat. Oběma variantami se přesně zabývají věta o korektnosti, resp. věta o úplnosti.

Věta o korektnosti. *Je-li Σ množina formulí a φ formule taková, že $\Sigma \vdash \varphi$, pak $\Sigma \models \varphi$.*

Věta o úplnosti. *Je-li Σ množina formulí a φ formule taková, že $\Sigma \models \varphi$, pak $\Sigma \vdash \varphi$.*

Ve fázi, kdy se v probírané látce dostaneme do těchto partií, vyvstává problém: jak přesvědčit studenty, že tabulková metoda není všespasitelná a proč vlastně se mají „hmoždit“ s důkazy a transformacemi. Především je potřeba podotknout, že tabulková metoda je nástroj dobrý, leč natolik robustní, že při složitějších formulích s její exponenciální zátěží nabírá neúnosnou míru i pro softwarové zpracování. Další podstatný rozdíl představuje to, že tabulková metoda nám nikterak neukáže, že logika jakožto základ deduktivních systémů a přirozené dedukce je bezesporná. Dalším momentem je fakt, že (matematický) důkaz je užitečný i z jiných pohledů. A především je zde kvalitativní rozdíl mezi kreativním vymýšlením důkazu, méně kreativním, leč stále ještě velmi produktivním myšlení procvičujícím transformace formulí do úplných konjuktivních či disjunktivních normálních forem a mechanickým počítáním tabulkové metody.

Příkladem, ve kterém využíváme nezávisle sémantického i syntaktického přístupu, je příklad 5.

3.4 Neklasické výukové prostředky

S ohledem na absenci cvičebnic a interaktivního výukového materiálu logiky vznikl projekt „Logiky (nejen) pro nelogiky“, který je koncipovaný jako multimediální cvičebnice na bázi webového rozhraní. Příklady, které bude cvičebnice obsahovat, budou začleněny do otevřeného výukového systému TRIAL

`http://trial.kma.zcu.cz.`

TRIAL rozvíjí a internetový portál spravuje katedra matematiky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Tento systém zahrnuje příklady k procvičení nejrůznějších partií matematiky na vysokých školách včetně souhrnu příkladů ze středoškolské matematiky. V současné době si zájemce zvolí matematickou disciplínu, resp. katedrou vyučovaný předmět, a v jeho rámci téma, které chce procvičit. Pak má díky náhodnému generování příkladů a jejich mutací k dispozici nepřeberně úloh na řešení. Přitom má možnost zvolit si buď pouze zadání a výsledek, nebo zadání, postup řešení a výsledek, anebo např. vzorové zadání pro písemnou práci. Vzhledem k tomu, že TRIAL je otevřený systém, který se stále rozvíjí a doplňuje, postupně přibudou i další možnosti jeho aplikovatelnosti.

Vypracované příklady budou publikovány i formou CD ROM.

Svým charakterem interaktivního přístupu k příkladu, přes odkrývání vzorového postupu až k vlastnímu řešení, přispívá projekt k aktivnímu používání výpočetní techniky a k modernizaci vzdělávacího procesu. Svojí otevřeností projekt umožňuje počet příkladů rozšiřovat i po jeho skončení a celou cvičebnici vlastně stále aktualizovat.

Příklady, které budou tvořit výslednou sbírku, budou pokrývat následující témata:

- výrokovou logiku v rozsahu: výroky, výrokové spojky, jazyk výrokové logiky, formule, tautologie, kontradikce, splnitelnosti, logický důsledek, odvozování formulí výrokové logiky (formální důkaz),
- predikátovou logiku prvního řádu v rozsahu: jazyk predikátové logiky, splňování a pravdivost v predikátové logice, odvozování v predikátové logice, automatické dokazování – prenexní normální forma,
- v nástinu neklasické logiky – vícehodnotové logiky, modální logiky, fuzzy logiky a jejich vztahy.

Příklad 2 je ukázkou z oblasti úvodních partií výrokové logiky.

O projektu více pojednává [2].

Další možností je využití softwaru MATHEMATICA, který umožňuje symbolické operace s proměnnými. Pro jednoduchost zatím uvádíme jen práci v oblasti sémantiky, a to zdrojový kód pro tabulkovou metodu pro formuli se dvěma a třemi proměnnými a úplnou disjunktivní normální formu pro dvou-, resp. tříatomární formuli. Není problém napsat vlastní aplikace pro formule s více proměnnými. Syntaktické operace jsou zatím ve fázi vývoje.

```
lh[i_?IntegerQ] = If[i==0,False,True];

tab2[for_] := Flatten[Table[{lh[i],lh[j],for[lh[i],lh[j]]},{i,0,1},{j,0,1}],1]
TM2[for_] := TableForm[tab2[for], TableHeadings -> {{},{p,q,for[p,q]}}]
CDNF2[for_] := Drop[Fold[#1||#2&,{},Select[tab2[for],#[[3]]==True&]
  /.{pp_?AtomQ,pq_,h_} -> If[pp,p,!p]&&If[pq,q,!q]],1]
CCNF2[for_] := Drop[Fold[#1&&#2&,{},Select[tab2[for],#[[3]]==False &]
  /.{pp_?AtomQ,pq_,h_} -> If[pp,!p,p]||If[pq,!q,q]],1]

tab3[for_] :=
 Flatten[
 Table[{lh[i],lh[j],lh[k],for[lh[i],lh[j],lh[k]]},{i,0,1},{j,0,1},{k,0,1}],2
 ]
TM3[for_] := TableForm[tab3[for], TableHeadings -> {{},{p,q,r,for[p,q,r]}}]
CDNF3[for_] :=
  Drop[Fold[#1||#2&,{},Slect[tab3[for],#[[4]]==True &]/.{pp_?AtomQ,pq_,pr_,h_}
  -> If[pp,p,!p] && If[pq,q,!q] && If[pr,r,!r]],1]
CCNF3[for_] :=
  Drop[Fold[#1&&#2&,{},Select[tab3[for],#[[4]]==False &]/.{pp_?AtomQ,pq_,pr_,h_}
  -> If[pp,!p,p]||If[pq,!q,q]||If[pr,!r,r]],1]
```

K demostraci těchto prostředků slouží příklady 8 a 9.

Podporou MATHEMATICY ve výuce se zabývá též [1]. Oproti [1] zde uvádíme i možnost pro výpočet úplné konjunktivní normální formy.

4 Ukázky příkladů

Níže uvedené příklady doprovází problematiku odstavců 2 a 3.

Příklad 1. Negujte výrok

Pokud venku nebude hezky, David půjde do školy.

Řešení. David nepůjde do školy a venku nebude hezky.

Příklad 2. Zapište všechny vlastní podformule formule

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\chi \vee \varphi).$$

Řešení. φ, ψ, χ, $\neg\psi$, $\varphi \wedge \neg\psi$, $\chi \vee \varphi$, $\neg(\chi \vee \varphi)$.

Příklad 3. Dokažte

$$\vdash \neg A \to (A \to B).$$

Řešení. Důkaz

1. $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (axiom $\varphi \to (\psi \to \varphi)$),
2. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \to \neg A)$ (věta o dedukci na 1),
3. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (axiom $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$),
4. $\{\neg A\} \vdash (A \to B)$ (modus ponens na 2 a 3),
5. $\vdash \neg A \to (A \to B)$ (věta o dedukci na 4).

Příklad 4. Je pravda, že z premis (předpokladů) $A \to B$, $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$ a C vyplývá závěr $\neg C$?

Řešení. Ano, protože neexistuje žádné přiřazení hodnot výrokům A, B a C, při kterém by byly všechny tři premisy současně pravdivé. Poznamejme, že tento příklad patří mezi ty, jejichž pochopení může studentům činit potíže, protože mezi premisami je C, zatímco závěr je $\neg C$.

Příklad 5. Uvažujme úsudek

Anna zmokla, a kdyby nešla ven, nezmokla by, takže Anna šla ven.

ve tvaru

$$(p \wedge (\neg q \to \neg p)) \to q. \qquad (*)$$

Proveďte jak sémantickou, tak i syntaktickou analýzu.

Řešení. Tabulkovou metodou ukážeme, že (*) je tautologií. Prázdná políčka znamenají, že jejich hodnoty jsou z hlediska vyhodnocování (*) irrelevantní.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$p \wedge (\neg q \to \neg p)$	$(p \wedge (\neg q \to \neg p)) \to q$
0	0				0	1
0	1					1
1	0	0	1	0	0	1
1	1					1

Disjunktivní normální forma má tvar

$$(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee q \equiv \neg(p \wedge (q \vee \neg p)) \vee q$$
$$\equiv \neg p \vee \neg(q \vee \neg p) \vee q \equiv \neg p \vee q \vee (p \wedge \neg q).$$

Formální důkaz sestává z následující posloupnosti:

1. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash p$ (axiom $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$),
2. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ (axiom $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$),
3. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q)$ (axiom $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$),
4. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ (axiom $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$),
5. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash \neg q \rightarrow p$ ((MP) na 1 a 4),
6. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash (\neg q \rightarrow p) \rightarrow q$ ((MP) na 2 a 3),
7. $\{p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)\} \vdash q$ ((MP) na 5 a 6),
8. $\vdash (p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow q$ (věta o dedukci 3.1 na 7).

Příklad 6. Rozhodněte, zda úsudek je, či není platný.

Jestliže pojedeme do Indie, potřebujeme cestovní pas.
Ale do Indie nepojedeme.
___
Tudíž nepotřebujeme cestovní pas.

Řešení. Úsudek není platný, protože může nastat situace, kdy předpoklady budou splněny, ale závěr ne, např. pojedeme-li do Japonska.

Příklad 7. Rozhodněte, zda úsudek je, či není platný.

Havel byl římským císařem nebo marťanem.
Pokud byl Havel římským císařem, pak byl prezidentem ČSFR.
___
Jestliže Havel nebyl prezidentem ČSFR, pak byl marťanem.

Řešení. Označíme jednotlivé elementární výroky: c pro „Havel byl římským císařem“, p pro „Havel byl prezidentem ČSFR“, m pro „Havel byl marťanem“ a formalizujeme:

$$\begin{array}{c} c \vee m \\ c \rightarrow p \\ \hline \neg p \rightarrow m \end{array}$$

1. přístup (rezoluční metoda): Snažíme se dospět k negovanému závěru, který by byl ve sporu s předpoklady, čímž dostaneme platný úsudek.

1. $c \vee m$,
2. $\neg c \vee p$,
3. $\neg p$,
4. $\neg m$ (negovaný závěr $\neg p \wedge \neg m$ rozdělíme na jednotlivé konjunkty),
5. c (z 1 a 4),
6. p (z 2 a 5),
7. $\square$ (z 3 a 6).

Formule 7 je prázdnou klauzulí, takže je nesplnitelná. Negovaný závěr je tedy ve sporu s předpoklady, a tudíž je úsudek platný.

2. přístup (přímý důkaz): Využijeme toho, že závěr úsudku je ve tvaru implikace, její antecedente přidáme mezi premisy a aplikujeme větu o dedukci.

1. $c \vee m$,
2. $\neg c \vee p$,
3. $\neg p$,
4. $\neg c$ (z 3 a 2),
5. m (z 1 a 4),
6. $\neg p \to m$ (věta o dedukci na 3 a 5).

Tím jsme provedli přímý důkaz závěru, takže úsudek je platný.

Příklad 8. Pomocí uvedných funkcí softwaru MATHEMATICA ověřte, že formule z příkladu 5
$$(p \wedge (\neg q \to \neg p)) \to q$$
je tautologií, a najděte její úplnou disjunktivní normální formu.

Řešení.

```
f1[p_,q_]:=(p&&(!q\[Implies]!p))\[Implies]q

TM2[f1]
  p      q      Implies[p&&Implies[!q,!p],q]
  False  False  True
  False  True   True
  True   False  True
  True   True   True

CDNF2[f1]
  (!p&&!q)||(!p&&q)||(p&&!q)||(p&&q)
```

Příklad 9. Pomocí uvedených funkcí softwaru MATHEMATICA ověřte, že formule

$$(p \vee q) \rightarrow r$$

je splnitelná, a stanovte její úplnou disjunktivní a konjunktivní normální formu.

Řešení.

```
f2[p_,q_,r_]:=(p||q)\[Implies]r

TM3[f2]
  p      q      r      Implies[p||q,r]
  False  False  False  True
  False  False  True   True
  False  True   False  False
  False  True   True   True
  True   False  False  False
  True   False  True   True
  True   True   False  False
  True   True   True   True

CDNF3[f2]
  (!p&&!q&&!r)||(!p&&!q&&r)||(!p&&q&&r)||(p&&!q&&r)||(p&&q&&r)

CCNF3[f2]
  (p||!q||r)&&(!p||q||r)&&(!p||!q||r)
```

Reference

[1] Benediktová, M., „A Few Examples on Classical Proposition Logic“, in *Proccedings of the 5th International Conference Aplimat 2006*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Bratislava 2006, 267–276.

[2] Benediktová, M., „Logika v úvodních kursech matematiky v příkladech“, in *Sborník příspěvků 10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Vydavatelský servis, Plzeň 2006, 69–72.

[3] Benediktová, M., „Logika“, in *Trial* (kapitola B), Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2006.
`http://trial.kma.zcu.cz`

[4] Jirků, P. & Vejnarová, J., *Logika. Neformální výklad základů formální logiky*, 2. vyd., Vysoká škola ekonomická v Praze, Praha 2000.

[5] Švejdar, V., *Logika. Neúplnost, složitost a nutnost*, 1. vyd., Academia, Praha 2002.