

Program *Tarski's World* a výuka jazyka predikátové logiky*

Michal Peliš

Katedra logiky Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze
e-mail: pelis@ff.cuni.cz

Abstrakt

Rozvoj osobních počítačů nabízí možnosti doplnit výuku logiky o didaktický software. V následujícím textu se pokusíme představit základní rysy, přednosti, ale i nevýhody programu *Tarski's World* ve výuce logiky. Ukážeme, že jeho hlavní předností je vizualizovaný přístup k výuce některých partií výrokové a predikátové logiky, který umožňuje učinit krok od překladů vět přirozeného jazyka do jazyka formalizovaného až k aktivnímu používání symbolů predikátové logiky. Současně se pokusíme naznačit, že použití programu nemusí být omezeno jen na tuto úzkou oblast, ale že je možné využít jej i v pokročilejších tématech predikátové logiky.

1 Úvodní kurzy logiky

Podíváme-li se na strukturu různých úvodních kurzů, které by měly seznámit vysokoškolského studenta se základy logiky, lze najít určité jádro tvořící skutečný pilíř znalostí z logiky. Tím je jazyk predikátové logiky a jeho aktivní zvládnutí. Při tvorbě úvodních kurzů se obvykle přihlíží k tomu, zda jde o kurz určený „matematickým oborům“.¹ Ať již je však kurz určen těm či oněm studentům, jsou základem jeho sylabu následující položky:

- logika jako věda (teorie definic, usuzování)

* Práce na příspěvku byla podpořena grantem GA ČR 401/03/H047.

¹ Sousloví „matematický obor“ rozumíme jako souhrnnému označení pro různá studia matematiky, informatiky, fyziky, logiky, ekonomie, lingvistiky, techniky a případně dalším navazujícím disciplínám.

- obecné úvahy o jazyce (znak, význam, reference)
- výroková logika
- predikátová logika (spolu s úvodem do teorie množin)
- kalkulus (axiomatizace)

Student se poprvé setkává s formálním jazykem a s rozlišením *syntaxe* a *sémantiky* při výuce základů výrokové logiky. V tom okamžiku je nucen aktivně zvládnout jednoduchý cizí jazyk. Naučí se rozumět symbolům výrokové logiky a používat je v pokročilejších partiích, kam patří např. úsudky v rámci výrokové logiky. Tato část obvykle nečiní studentům potíže a jsou schopni aktivně používat principy tabulkových metod nebo sémantických stromů. Výroková logika je i příležitostí k zavedení formálního usuzování, které zatím využívá věty formalizovatelné v predikátové logice pouze jako určitý meta-jazyk. Příkladem je studium vlastností sémantického důsledku, s nímž se studenti setkali v úsudcích nad výrokovou logikou, což může navíc tvořit jistý motivační prvek ke zvládnutí predikátové logiky.

Setkání s predikátovou logikou je mnohdy pro studenta drobným šokem. Po zavedení symboliky jako neinterpretovaného jazyka je obvykle konfrontován s induktivní definicí dobře utvořené formule a stává se bezradným, jakmile se snaží využít svých znalostí z výrokové logiky.

Zde je skutečně třeba uvědomit si, že zejména v našem prostředí a pro studenty humanitních oborů je jazyk predikátové logiky jazykem *cizím*. Tomu, do jisté míry, odpovídá i přístup většiny učebnic, kde se klade důraz na překlady z přirozeného do formalizovaného jazyka a zpět. Tato pochopitelná snaha o zprostředkování porozumění symbolům predikátové logiky se však zaměřuje na vytvoření „návodu“, jak takové překlady provádět, čímž se věc spíše komplikuje, protože se mnohdy naráží na omezení, která přináší složitost přirozeného jazyka. Typickým příkladem je jeho víceznačnost při určování rozsahu kvantifikátorů. [2]

1.1 Problémy při výuce jazyka predikátové logiky

Studentům obvykle nečiní potíže naučit se symboliku jazyka predikátové logiky, utvořit formuli, rozpoznat dosah jednotlivých kvantifikátorů a obvykle ani nemají potíže s jednoduchými překlady vět přirozeného jazyka s jedním kvantifikátorem (např. subjekt-predikátové výroky). Problémy se objevují při zavádění sémantiky. Významům výrazů jazyka predikátové logiky se je potřeba naučit jak v pasivním smyslu, kde se klade důraz

na porozumění zápisům formulí, tak i ve smyslu aktivním, kdy je podstatné zvládnout popsat „stav světa“ pomocí formulí predikátové logiky. Pokud se nepovede udělat tento krok, je obtížné a vlastně nemožné pokračovat dále ve výkladu pokročilejších partií logiky, kam spadají úsudky a další sémantické a syntaktické metody výrokové i predikátové logiky (korektnost, úplnost apod.).

Od prvního okamžiku, kdy se student setká s jazykem predikátové logiky, začne jej porovnávat s výrokovou logikou. Často se mu zdá, že jde o značně odlišný jazyk, a neumí ani aplikovat znalosti získané ve výrokové logice. Mezi velmi výrazná úskalí při výuce, o nichž má smysl se zmínit v souvislosti s výhodami didaktického softwaru, patří

1. neporozumění rozdílu mezi individuovou (objektovou) proměnnou a konstantou,
2. zavedení sémantiky jazyka predikátové logiky jako interpretace v abstraktní struktuře,
3. uplatnění sémantiky predikátové logiky při ověřování správnosti úsudků.

První ze zmiňovaných problémů by mohl být chápán ještě širěji jako problém abstrakce. Když se zavádí symboly pro konstanty, funkce a predikáty, jsou samy brány jako druhy proměnných. Student si však na úplném počátku neuvědomí, že je to něco jiného než proměnné, které hrají roli „děr“.

Jak jsme se již zmínili, chceme po studentech, aby byli v první fázi schopni překládat věty přirozeného jazyka do jazyka predikátové logiky. U věty

Každý ředitel má alespoň jednoho podřízeného.

očekáváme, že student napíše

$$\forall x \exists y (R(x) \rightarrow P(y, x)) \quad (1)$$

nebo

$$\forall x (R(x) \rightarrow \exists y P(y, x)) \quad (2)$$

a dodá, že symbol R zastupuje jednomístný predikát *být ředitelem* a symbol P dvoumístný predikát (relaci, vztah) *je podřízen*. Na druhé straně po studentovi chceme, aby formule (1) a (2) přeložil do přirozeného jazyka, když R zastupuje *být rychlý* a P znamená *je předběhnut*. Tento

přístup však nenaučí aktivnímu popisu „světa“ pomocí formulí predikátové logiky.

Zmíněný druhý problém souvisí s nedostatečnou *vizualizací*. Velmi brzy po zavedení symbolů predikátové logiky chceme po studentech, aby uvažovali o modelech jako o obecných abstraktních strukturách, a jediným případem, kdy se vracíme k překládání formulí do přirozeného jazyka, je hledání protipříkladu. Zde student naráží na to, že nerozpozná, kdy se mu nějaká přirozenějazyková interpretace může hodit. Nemluví o tom, že učitelé logiky mají tendenci začínat s větami o „ředitelích“ a „podřízených“, ale jako příklady struktur jsou jim nejbližší příklady z matematiky. Nalézáme se na oné hranici, kterou logik snadno překročí, ale student se může ocitnout v říši naprostého neporozumění. Formální sémantika predikátové logiky je pro studenty dalším stupněm abstrakce, proto je třeba, aby krok, který chceme společně s nimi udělat, byl velmi opatrný.

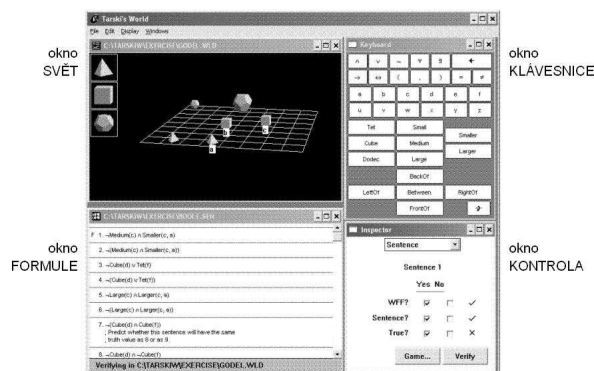
Třetí zmiňovaný problém je uveden spíše jako ilustrace problémů z oblasti používání sémantiky predikátové logiky. Vše, o čem jsme dosud hovořili, směřovalo k tomu, abychom naučili studenty aktivně pracovat s jazykem predikátové logiky, a tak se vyhnuli potížím, které by se mohly objevit v těchto pokročilejších partiích logiky.

2 Program *Tarski's World*

Rozvoj osobních počítačů a počítačové grafiky umožnil rozšířit způsoby výuky logiky o různé didaktické pomůcky. Program *Tarski's World* autorů Jona Barwise a Johna Etchemendyho vznikl právě s cílem usnadnit výuku jazyka predikátové logiky. První verze se objevila na přelomu 80. a 90. let s jen o trochu starším programem *Turing's World*. Oba programy jsou zaměřeny na vizualizovanou výuku v kurzech matematické logiky. Primárním cílem *Tarski's World* je usnadnit výuku jazyka predikátové logiky a udělat tak onen opatrný krok mezi překlady vět přirozeného jazyka a abstraktními strukturami. Záměr programu naznačuje i jeho jméno, které si autoři vypůjčili od významného polského logika Alfreda Tarského (1902–1983), jehož můžeme považovat za zakladatele moderního pojetí formalizované sémantiky predikátové logiky.

Program *Tarski's World* je ve své obsluze velmi jednoduchý. Návod lze najít na internetu [3] a v příslušných knihách (např. [1]). Program existuje pro počítače Macintosh i operační systém Windows (verze 4.0, 5.0 a 6.0). My se zaměříme pouze na základní přehled didaktických mož-

ností a funkcí programu. Jednotlivé verze se trochu liší v ovládání, ale základní „filozofie“ programu je stejná.²

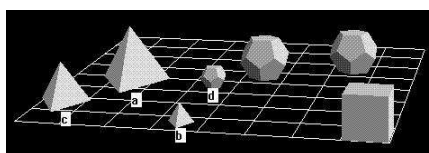


Obrázek 1. Okna programu

Na obrázku 1 vidíme čtyři hlavní „okna“, pro něž jsme se rozhodli použít česká označení. Vlevo nahoře je okno SVĚT, které zobrazuje a umožňuje upravovat příslušný svět prostorových objektů. Ihned pod ním je okno FORMULE, které používá k popisům světů formule predikátové logiky tvořené pomocí symbolů z okna KLÁVESNICE. Okno KONTROLA pak slouží ke kontrole syntaxe a pravdivosti sentencí ve zvoleném světě a (v této verzi) je to i ovládání objektů při úpravách v okně SVĚT.

Řekli jsme však, že bez ohledu na verzi programu můžeme u *Tarski's World* hovořit o jistých základních možnostech práce s programem a těmi jsou:

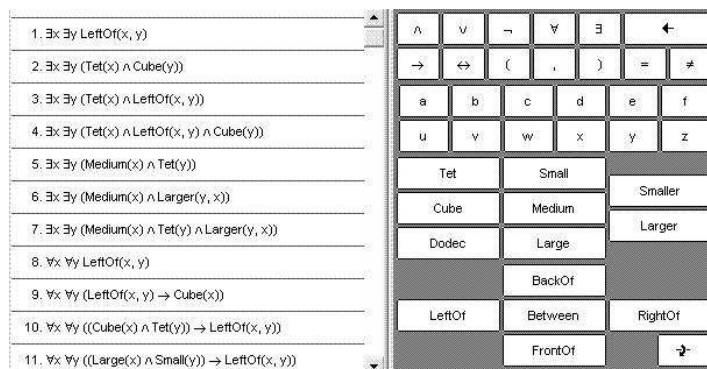
- Na mřížce 8×8 lze vytvářet svět z objektů tří tvarů (krychle, čtyřstěn, dvanáctistěn) a tří velikostí (malá, střední, velká) – viz obrázek 2.



Obrázek 2. Příklad světa

- Světy lze popisovat pomocí symbolů predikátové logiky a několika vybraných mimologických symbolů.

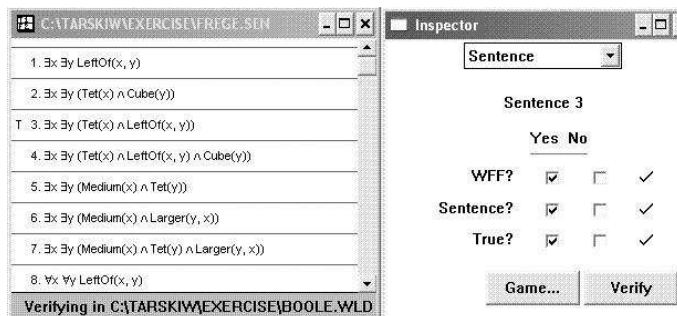
² V obrazovém materiálu použijeme verzi 4.0 pro MS Windows.



Obrázek 3. Jazyk programu

V okně KLÁVESNICE (na obrázku 3 vpravo) jsou k dispozici vedle logických symbolů jazyka predikátové logiky s rovností i symboly pro konstanty v rolích jmen objektů (*a* až *f*) a interpretované predikáty. Pro mezikrok od překladů vět přirozeného jazyka k abstraktním sémantickým strukturám se interpretovaný jazyk programu jeví být velmi vhodným. Je však třeba na to studenty včas upozornit, protože se sami budou setkávat s neinterpretovaným jazykem v učebnicích predikátové logiky, kde běžně neplatí, že predikát označený *LeftOf* nějak souvisí s predikátem *RightOf*.

- Lze provádět syntaktickou kontrolu formulí a sentencí a ověřovat pravdivost sentencí v daném světě.

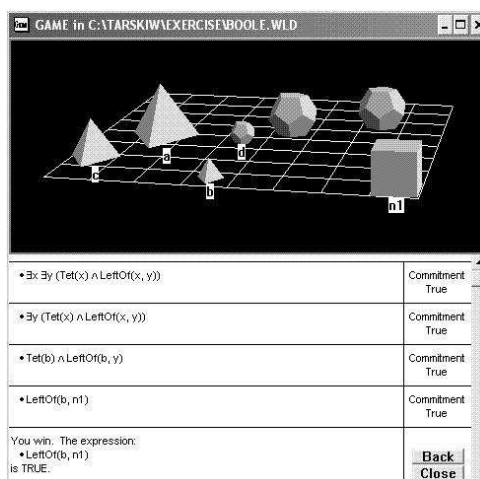


Obrázek 4. Formule

Student si může nechat zkontrolovat jednotlivé zápisy po syntaktické i sémantické stránce. Na obrázku 4 jsme zaškrtnuli v okně KON-

TROLA, že třetí řádek obsahuje správně utvořenou formuli, jde o sentenci a v příslušném světě je pravdivá, a nechali jsme si tato tvrzení programem ověřit (tlačítko „Verify“).

- Posledním výrazným prvkem je možnost systematicky ověřovat pravdivost v daném světě. Z okna KONTROLA lze spustit *sémantickou hru* („Game...“), která žádá po studentovi zdůvodňovat krok za krokem tvrzení o pravdivosti či nepravdivosti zvolené sentence (viz obrázek 5) a současně mu umožňuje vrátit se zpět. Volil-li student chybné kroky, přestože původně správně rozhodl o pravdivosti či nepravdivosti dané sentence, je na to programem na závěr „hry“ též upozorněn.



Obrázek 5. „Sémantická hra“

Součástí programu je i velké množství připravených světů a posloupností formulí, které umožňují další kombinace a úpravy. V učebnici je pak seznam cvičení, která je využívají se zdůrazněným didaktickým záměrem.

Jako poslední poznámku v tomto stručném seznámení s programem uvedme, že na něj navazuje program *Hyperproof* týchž autorů, jehož cílem je výuka dokazování ve formálnější podobě.

2.1 Didaktické možnosti programu *Tarski's World*

Hlavní předností *Tarski's World* je, že poskytuje vizualizované seznámení se sémantikou predikátové logiky. Již jsme zdůraznili, že pro mnoho stu-

dentů je výuka jazyka predikátové logiky výukou jazyka, který je jim cizí, i když třeba bez problémů zvládli jazyk logiky výrokové. Program stojí na pomezí jednoduchých překladů z přirozeného jazyka do jazyka formalizovaného a značné abstraktnosti při zavádění sémantiky predikátové logiky. Umožňuje tak naučit se jazyku predikátové logiky souběžně ze dvou hledisek, která bývají v běžných kurzech rozdělena do dvou fází:

1. *Pasivní znalost* jazyka. V této fázi se studenti učí *porozumět* symbolům jazyka predikátové logiky a sem obvykle spadá překládání vět z přirozeného jazyka.
2. *Aktivní znalost* jazyka. Zde je již úkolem umět *používat* symboliku predikátové logiky.

Již jsme také zdůraznili, že právě druhá fáze se může stát kritickou. Program *Tarski's World* umožňuje díky jednoduchému rámci tvořenému nějakým „světem“ objektů tento svět popisovat, čímž se objasňuje použití predikátových symbolů, jejichž množství je omezeno na jazyk programu a student se s nimi seznámil již v první (pasivní) fázi.

Velkou výhodou programu je jeho obsáhlá databáze příkladů, které umožňují vyučujícím i studentům rovnou zahájit práci. Tím se *Tarski's World* vyhnul klasickému problému některých aplikací, které jsou pro studenta nezájímavé díky tomu, že neposkytují základ pro vlastní práci, a student je brzy odkládá, pokud je nechce využít k řešení nějakého vlastního a předem stanoveného projektu.

Databáze příkladů je v učebnici doplněna návody ke cvičením, což usnadňuje vyučujícímu práci a poskytuje mu návod k dalším projektům. Program je určen i k samostatné práci studentů a lektor jej může navíc použít k testování znalostí.

Na druhé straně však musíme připomenout skutečnou roli *Tarski's World* v rámci výuky jazyka predikátové logiky. Jeho úloha je v této oblasti omezena na zmiňovaný krok mezi prostými překlady a formální sémantikou predikátové logiky. Sami autoři považují program za doplněk klasických kurzů. Rozhodně lze doporučit, aby před používáním programu byli studenti dobře seznámeni s výrokovou logikou a alespoň se základy logiky predikátové. Tak se mnohem snáz vysvětlí omezení programu a nedojde ke ztotožnění rutiny používání programu s praxí v predikátové logice.

K výše uvedeným didaktickým možnostem a omezením se ještě podrobněji dostaneme v následující podkapitole.

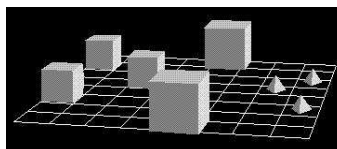
2.2 Sémantická hra, soubory úloh a další možnosti programu

V předchozích dvou kapitolách jsme se seznámili se základními rysy programu *Tarski's World* a vymezili jsme si jeho didaktické možnosti. Teď se podívejme na těžiště použití programu, za něž můžeme považovat *sémantickou hru* a soubor cvičení v učebnici.

Při výuce aktivního používání symbolů predikátové logiky je velmi vhodné naučit studenta číst posloupnost symbolů ve formuli s ohledem na jejich obecný význam a tím uplatnit znalosti z výrokové logiky. Na tomto přístupu je založena *sémantická hra*. Student rozhoduje o pravdivosti či nepravdivosti příslušných sentencí v daném světě a každé takové rozhodnutí musí být schopen obhájit. Jako ilustrativní příklad si vezměme, že náš student tvrdí, že sentence

$$\forall x(\text{Krychle}(x) \vee \text{Čtyřtěň}(x))$$

je ve světě na obrázku 6 pravdivá.



Obrázek 6. Příklad

Po spuštění *hry* je vyzván k prokázání toho, že pro programem vybraný objekt (pojmenovaný n) platí

$$\text{Krychle}(n) \vee \text{Čtyřtěň}(n),$$

souhlasí-li, je následně student vyzván k výběru, který z obou disjunkcí $\text{Krychle}(n)$ a $\text{Čtyřtěň}(n)$ je pravdivý.

Výhodou *sémantické hry* je, že student je systematicky veden k promýšlení a zdůvodňování výzev, které se ve hře objevují. To může být prvním krokem, kdy je současně upozorněn na aplikaci znalostí z výrokové logiky. Dalším krokem by pak mohlo být navrhování každé výzvy předem. Odtud je nutno vést studenta dále, a to až k samostatnému odvození obecného významu dané logické formy. Tato závěrečná fáze je však již na učiteli, protože program bude vždy postupovat podle výše naznačeného schématu a např. u formule

$$\forall x((\text{Malý}(x) \wedge \text{Velký}(x)) \rightarrow \text{Dvanáctistěň}(x))$$

nijak nenaznačí, že se jedná o sentenci pravdivou ve všech světech *Tarski's World*. My však po studentovi jistě budeme chtít, aby toto poznal a byl schopen kromě toho rozhodnout, zda se jedná o tautologii predikátové logiky či nikoli.

Určitým řešením tohoto „nedostatku“ stroje je vhodné použití cvičení. Návody k úlohám lze najít jak v učebnicích obou autorů (např. [1]), tak i na internetu [3].

Samozřejmě je začít s cvičeními, která umožní zvládnout ovládání programu. Zde ještě není třeba vytvářet propojení s dosud nabytými znalostmi z logiky.

V okamžiku, kdy umí student tvořit světy a využívat syntaktických prostředků programu k zápisům formulí, je vhodné přistoupit k procvičení výrokové logiky. Tím se u studentů upevní představa o významu spojek výrokové logiky v rámci jazyka programu. Následně lze přejít k procvičování významů predikátových symbolů. V této fázi je vhodné využít cvičení, která vyžadují pravdivostní ohodnocení sentencí v daných světech a naopak budování či dotváření světů pro platnost daných sentencí. Teprve dalším krokem jsou překlady vět přirozeného jazyka do jazyka symbolického a navázání na předchozí dovednosti. Nejlépe je začít „četbou“ připravených formulí ve vztahu k zobrazenému světu, pak pokračovat v překladech jednoduchých vět, jako je

Je-li a čtyřstěn, pak se nalézá před b.

a dostat se až ke složitějším větám, např.

Objekt a je na jedné nebo druhé straně objektu b pouze tehdy, je-li a krychlí.

Přestože jsme u programu *Tarski's World* dosud zdůrazňovali zejména jeho význam při výuce základního ovládání jazyka predikátové logiky, můžeme ho využít i k dalším partiím v rámci úvodních kurzů. Sem spadá schopnost formalizovat věty s více kvantifikátory, např.

Každý objekt, který je za některým čtyřstěnem, je mezi krychlemi.

nebo výklad negací a dalších vlastností subjekt-predikátových výroků v duchu aristotelické sylogistiky či výklad russelských určitých deskripcí a některých typů determinátorů.

Pozadu nezůstane ani využití při výuce úplných základů teorie modelů. Konkrétní svět se objevuje v roli jednoho modelu a je nutné studentům ukázat rozdíly mezi pravdivostí v jednom světě, ve třídě určitých světů, ve všech světech programu a obecně ve všech modelech mimo

programem zavedený interpretovaný jazyk. *Tarski's World* plní dobře svou úlohu jako zdroj vizualizovaných protipříkladů při výuce vyplývání v predikátové logice.

Mezi již pokročilejší úlohy patří zachovávání pravdivosti sentencí při expanzích a kontrakcích světů a výklad pojmu *elementární ekvivalence* modelů (v daném jazyce). Tím se již dostáváme až k tématu omezení formálních jazyků a nemožnosti vyjádřit některé predikáty (např. Být-BezprostředněVedle).

I když jsme programu *Tarski's World* přisoudili zejména roli pomůcky ve výuce základních kurzů logiky pro studenty humanitních směrů na vysokých školách, není důvod nepoužít ho i v kurzech na středních školách a v úvodních kurzech „matematických“ oborů.

Reference

- [1] Barwise, J. & Etchemendy, J., *Tarski's World*, CSLI, Stanford 1993.
- [2] Barwise, J. & Etchemendy, J., *Computers, Visualization, and the Nature of Reasoning*.
<http://www-csli.stanford.edu/hp/CVandNR.pdf> (22. 8. 2006)
- [3] <http://www-csli.stanford.edu/hp>