

Sudoku a logika

Marie Benediktová

Katedra logiky Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze
e-mail: marie.benediktova@gmail.com

Abstrakt

V příspěvku se budeme zabývat populární logickou hrou sudoku. Představíme ji z důvodu její využitelnosti k motivaci řešení složitějších logických a matematických úloh na všech stupních škol. Vedle klasického sudoku zmíníme i různé alternativní typy sudoku, popíšeme odlišnosti v technikách řešení a uvedeme dosud nezveřejněné metody řešení. Na závěr se pokusíme vymezit použití logických zákonů v sudoku.

1 Proč se zabývat sudoku?

S ohledem na ustupující hodinové dotace matematiky na všech stupních a typech škol se vzdělanost po stránce logické zdá být na ústupu. O to více se do obliby dostávají populární logické úlohy a hlavolamy. Jedním z nich je právě i sudoku. Tato hra je založena na čistě logickém uvažování luštitelů, nevyžaduje žádné školní vědomosti. Charakter hry sudoku umožňuje, že ji mohou řešit i malé děti od dvou let (například v barevných modifikacích). Horní věková hranice je pochopitelně neomezená. Ukazuje se, že v hodinách matematiky na všech stupních škol je tato hra velmi příjemným zpestřením úvodních pěti minut a výborně studenty probudí pro další práci na poli logického myšlení.

2 Co je sudoku?

Název sudoku vznikl z japonského „Súdži wa dokušin ni kagiru“, ale původ hry není japonský. Hra byla otištěna již v osmdesátých letech 20. století pod názvem „Number Place“ v americkém magazínu o hlavolamech.

Japonci si ji rychle oblíbili a pro euroatlantickou civilizaci prakticky znovuobjevili. V současné době ji uveřejňují ve svých přílohách přední světové deníky takového formátu jako The Times, The Guardian a mnoho dalších. Patří také mezi vděčné „křížovky“ většiny českých periodik. Sudoku je natolik populární, že se v něm pořádá i mistrovství světa. První proběhlo v březnu roku 2006 v italské Luce a mistryni světa se stala Češka Jana Tylová.

3 Pravidla sudoku

Je zadána tabulka (matice) o devíti sloupcích a devíti řádcích s několika předepsanými čísly od 1 do 9. Cílem je doplnit, pokud možno v co nejkratším čase, zbývající prázdná políčka čísly 1 až 9 tak, aby se žádné číslo v žádném sloupci, řádku, ani v žádném z devíti zvýrazněných čtverců o hraně tří čtverečků neopakovala. To znamená, že v každém řádku, sloupci a tučně ohraničeném čtverci musí být každé číslo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 právě jednou. Korektně zadaná tabulka má právě jedno řešení.

Na první pohled se zdá řešení lehké, ale opak je pravdou. Obtížnost hry sudoku není dána počtem skrytých políček, ale jejich vzájemnými vazbami, které mohou být dost složité. Těžké tabulky mohou průměrně zkušenému luštiteli zabrat 15 až 60 minut.

Aby měla tabulka právě jedno řešení, musí mít zadaných minimálně 17 čísel. Klasická korektní sudoku se 16 zadanými čísly nejsou známa. Ovšem to, že hlavolam má předem zadáno pouze 17 čísel, neznamená, že musí být těžší než některé s více předepsanými čísly. Jako příklad můžeme použít následující dva hlavolamy s 64 neznámými čísly: první tabulku (viz obrázek 1) patří mezi jednu z nejlehčích, zatímco druhou (viz obrázek 2) nelze vyluštit užitím dnes známých technik a vyžaduje náhodné zkoušení možných hodnot.

4 Terminologie sudoku

Sudoku hlavolam (puzzle) obsahuje celkem 81 buněk, políček. Skládá se tedy z devíti řádků, devíti sloupců a devíti čtverců o devíti (3×3) políčkách. Řádky se běžně číslují vzestupně směrem shora dolů, sloupce zleva doprava, čtverce z levého horního přes pravý horní k pravému dolnímu. Konvence pro označování políček není jednotná, běžné je značit (xy) , nebo též $rcxy$, kde x je řádek (row), y sloupec (column).

						1	2
			3	5			
		6				7	
7					3		
		4			8		
1							
		1	2				
	8					4	
	5				6		

Obrázek 1.

					4	3
			6			
			5			
					2	9
	4				6	
	3	8				
		4	3	5		
6					1	
2		7				

Obrázek 2.

Všechna čísla, která se v danou chvíli mohou v políčku nacházet, se nazývají kandidáti. Kandidáty zvláště u obtížnějších úloh píšeme jako malé pomocné vpisky. Kandidáty pro dané políčko během hry postupně redukuje, až získáme výsledné číslo.

Blokem rozumíme souhrnně řádek, sloupec nebo čtverec, tj. oblast s právě devíti políčky.

5 Jak postupovat při hraní? – Techniky hraní

Dále uvedeme vybrané techniky hraní sudoku. Čtenáři doporučujeme však vymyslet si vlastní metody, jak sudoku řešit, protože není nad „zdravý selský rozum“. Vzhledem ke zvyku užívat anglických termínů nebudeme ani v tomto příspěvku překládat názvy jednotlivých technik. Další techniky lze najít např. na stránkách [7].

Dosazení jasných čísel používáme na začátku hraní a na konci, kdy už máme ostatní kandidáty vyloučeny pomocí jiných metod.

Naked Single – Hledáme políčka, ve kterých může být jen jediný kandidát. Na obrázku 3 vidíme, že v políčku označeném hvězdičkou může být pouze číslo 6. Ostatní čísla jsou vyloučena díky tomu, že jsou již obsažena ve stejném řádku, sloupci nebo čtverci.

Hidden Single – Hledáme v každém bloku čísla, která lze v daném bloku dosadit jen na jednu možnou pozici. Na obrázku 4 je naznačeno, že ve vyznačeném políčku musí být číslo 2, protože jinde v pátém čtverci být nemůže.

Poznamenejme, že zatímco Hidden Single je snadno vidět, Naked Single vyžaduje projít všechny možnosti v daném políčku.

Vylučování kandidátů.

Naked Pair – Hledáme v bloku taková dvě políčka, v nichž se vyskytuje pouze totožná dvojice kandidátů. Potom můžeme z kandidátů v ostatních políčkách v daném bloku tato dvě čísla vyloučit.

			4	
			7	
			9	1 2
			*	
8	5		*	
			3	

Obrázek 3. Naked Single

		2		
		7		
		*		
		1		
			2	

Obrázek 4. Hidden Single

Hidden Pair – Hledáme dvojici čísel, které se vyskytují mezi kandidáty pouze ve dvou políčkách jednoho bloku. Potom můžeme z kandidátů v těchto políčkách ostatní čísla vyloučit.

Podobně řešíme Naked či Hidden Triple, Quadruple, ..., nazývané souhrnně Naked/Hidden Subset.

Složitější techniky

X-Wing – Jedná se o vyloučení konkrétního kandidáta ze sloupců za podmínky, že najdeme takové dva řádky, kde se daný kandidát nachází právě dvakrát ve stejných sloupcích. Potom v těchto sloupcích můžeme vyloučit tohoto kandidáta v ostatních řádcích. Podobně také hledáme takové dva sloupce, kde se daný kandidát nachází právě dvakrát ve stejných řádcích a v těchto řádcích můžeme daného kandidáta v ostatních sloupcích vyloučit.

Na obrázku 5 máme X-Wing pro kandidáty čísla 9 na pozicích (21), (29), (81), (89). Poznamenejme, že jinou metodou tuto situaci řešit nelze. A právě díky tomuto zde Jana Tylová vyhrála mistrovství světa.

Unique Rectangle – Na rozdíl od ostatních metod tato technika využívá vlastnosti jednoznačné řešitelnosti sudoku, tj. korektnosti zadání. Jedná se o postavení čtyř políček tvořící vrcholy obdélníku, ve kterých se nachází stejná dvojice kandidátů.

Pokud nám v sudoku vznikne Unique Rectangle, pak jsme někde udělali chybu a můžeme začít luštit znovu. Techniku lze ale využít k vyloučení kandidátů. Pokud zjistíme, že je Unique Rectangle na spadnutí,

ze zbývajících rohu vyloučíme právě dvojici kandidátů, která by Unique Rectangle způsobila (viz obrázek 6).

8			7	5				3
⁶⁹	3	⁵⁶⁷	¹⁶	4	8	¹⁵⁶⁷	2	⁵⁹
1								6
3	4			7				8
7	9		4	8			3	1
2		8					7	4
5			8	1	4			7
⁶⁹	8	¹	3	2	7	¹⁵⁶	4	⁵⁹
4			5	6	9			2

Obrázek 5. X-Wing

							⁵⁹	4
							⁵⁹	⁵⁹

Obrázek 6. Unique Rectangle

Forcing Chains – Nejdříve najdeme políčko, kde máme jen dva kandidáty. Pak najdeme jiné políčko, ve kterém bude, ať si v prvním políčku vybereme kteréhokoli kandidáta, stejné číslo. Tato metoda je poměrně obtížná a těžko se hledá. Na obrázku 7 máme situaci, kdy v políčku na pozici (16) může být číslo 2 nebo 9. A ať zvolíme 2 nebo 9, na pozici (27) dostaneme vždy 9.

5					²⁹			4
	2	4	5		1		6	
				7	4	2	5	1
2	5	6	7	9	3	1	4	8
1	9	3	2	4	8	5	7	6
8	4	7	1	5	6	3	2	9
		2		1	5	4		
	3	5	4		7		1	2
4								5

Obrázek 7. Forcing Chains

Trial and Error – Pokud předchozí techniky selžou, máme možnost využít korektnosti zadání sudoku. Metoda pokusu a omylu není bezhlavým zkoušením všech kandidátů ve všech políčkách, ale z možných kandidátů si vybereme jednoho a postupujeme, dokud nenarazíme na spor. Pokud jsme ke sporu dospěli, víme, že tohoto kandidáta můžeme vyloučit. V této technice je třeba být velice obezřetní a dávat pozor, abychom spor nepřehlédli. Příkladem pro tuto techniku je již zmíněné zadání na obrázku 2.

Nishio – Jedná se o speciální formu techniky Trial and Error. Pro kandidáta v políčku si položíme otázku, zda by doplněním tohoto čísla do daného políčka bylo znemožněno doplnit i ostatní stejná čísla do políček tak, aby vše odpovídalo pravidlům. Pokud by doplněním onoho kandidáta do políčka bylo znemožněno doplnit ostatní čísla v souladu s pravidly, můžeme tohoto kandidáta vyloučit.

6 Alternativy sudoku

Kromě klasického sudoku existuje řada jeho alternativ. Ve všech platí pravidla klasického sudoku, s modifikacemi se přidávají i podmínky navíc. Některé techniky, které platí v klasickém sudoku, je pak nutné pro různé alternativy upravovat.

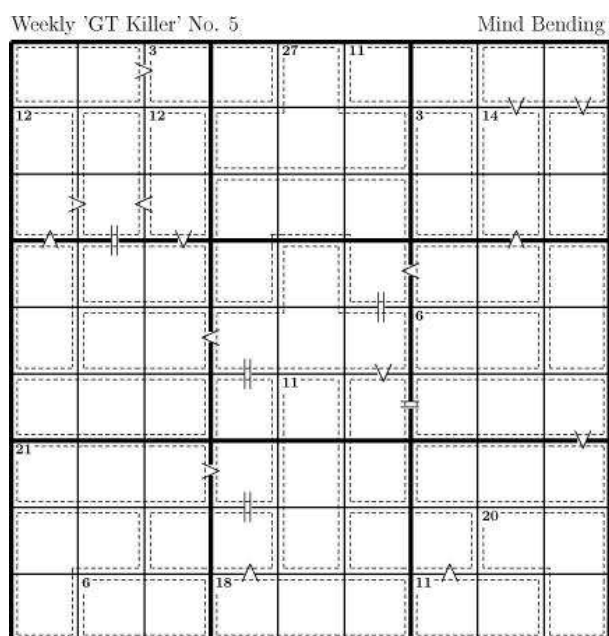
Alternativy sudoku tak můžeme rozdělit do tří skupin. Uvedený výběr sudoku je pouze orientační, stejně jako skupiny.

V první skupině uvedeme ty, které modifikují tvar sudoku. Mezi takové patří Irregular Sudoku a Toroidal Sudoku, v nichž se namísto čtverců 3×3 vyskytují nepravidelné oblasti. Mechanical Sudoku si nejprve musíme sestavit jako puzzle, čtverce 3×3 jsou totiž poslepovány jinak, předem zadaných čísel bývá více, takže pomocí pravidel nejprve sestavíme klasické sudoku a řešíme, jak jsme zvyklí.

Zmenšené varianty sudoku jsou například Shidoku, kde namísto 81 políček máme jen 16 se čtverci 2×2 a dosazujeme jen čísla 1 až 4. Rukudoku má 6 oblastí o velikosti 2×3 políčka a umísťujeme čísla 1 až 6. Kombinací Irregular Sudoku a zmenšených variant je Pento-sudoku s pěti oblastmi a číslicemi 1 až 5.

Druhá skupina omezuje kandidáty v políčkách. Mezi takové patří Even/Odd Sudoku, v němž máme naznačeno, ve kterých políčkách budou čísla sudá a kde lichá. Zadaných čísel je o to méně. Podobně funguje Sudoku 147 – namísto dvou tříd čísel (sudých a lichých) máme tři třídy pro skupiny 123, 456 a 789.

Outside Sudoku, kde kandidáty nemáme naznačené ve vlastní tabulce, ale pouze podél hranic celé tabulky u jednotlivých sloupců a řádků, je spojovníkem mezi skupinou druhou a třetí, do které můžeme řadit sudoku bez předepsaných čísel (blank sudoku), ale se vztahy mezi políčky. Do třetí skupiny patří Greater/Less Sudoku (též Greater Than (GT)), kde mezi všemi sousedními políčky máme relační znaménka $<$ a $>$. Killer Sudoku (Sum Sudoku) má vyznačené zvláštní oblasti s předepsaným součtem čísel, které se v těchto oblastech ve výsledku nacházejí, s přídatnou podmínkou, že v oblastech se žádná čísla nevyskytují vícekrát. Podobně pak Product Sudoku má ve vyznačených oblastech předepsaný součin čísel. Kombinací Killer Sudoku a Greater/Less Sudoku je Inequality Killer, zvaný též Greater Than Killer (GTK), ve kterém nejsou součty všech oblastí předem dány, ale mezi součty jsou předepsány relační vztahy. Ukázkou těžšího zadání GTK uvádíme na obrázku 8 (převzato z [4]).



Copyright ©2006, killersudokuonline.com

Obrázek 8. Greater Than Killer Sudoku

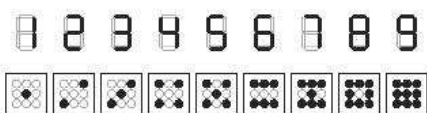
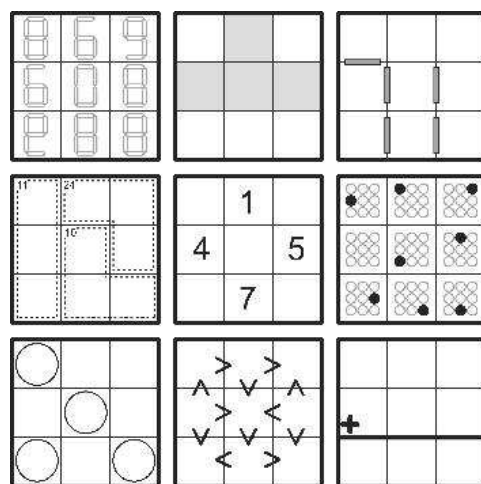
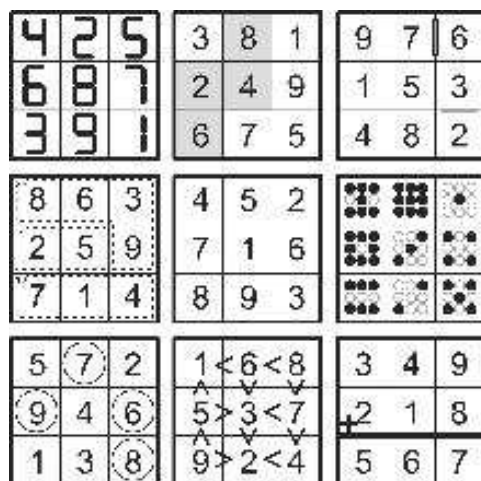
Do třetí skupiny rovněž spadá i Consecutive a Non-consecutive Sudoku, ve kterém jsou kromě malého počtu čísel zadané vztahy mezi políčky znamenající následníka nebo předchůdce, případně i vyloučení následníka či předchůdce daného čísla.

Sudoku tabulky se též slepují do větších celků, používají se různé netradiční tvary, slova, barvy... (viz též [9], [2]).

Na závěr uvedme na obrázku 9 Combined Sudoku z mistrovství světa 2006. Celé sudoku podléhá pravidlům klasického sudoku, jednotlivé čtverce pak jednotlivým alternativám – první čtverec Digital, druhý Even/Odd, třetí Consecutive, čtvrtý Killer, pátý klasickému, šestý Pips, sedmý Big-small, osmý Greater/Less a devátý Pandigital Sudoku. Zadání i příklad jsou převzaty z [6].

7 Techniky řešení vybraných alternativních sudoku

Dále budeme modifikovat klasické techniky. Zaměříme se přitom na blank sudoku, konkrétně na techniky pro Killer a Greater/Less Sudoku.



Obrázek 9. Příklad a vlastní zadání Combined Sudoku

V Killer Sudoku postupujeme od naznačení kandidátů v oblastech s jednoznačně určenými součty (např. oblast o velikosti dvou políček se součtem 4 obsahuje právě dvojici kandidátů 1 a 3), přes určení jednoznačných čísel dopočítáním do součtu čísel v jednotlivých blocích (součet všech je vždy 45) k využití technik klasického sudoku.

V situaci, kdy v bloku máme například oblast o dvou políčkách se součtem 6 (takže kandidáty 1, 2, 4, 5) a zároveň se v témže bloku nachází políčko s kandidáty 2, 4 nebo přímo s číslem 2 nebo 4, můžeme z dvoupolíčkové oblasti vyloučit právě kandidáty 2 i 4.

V Killer Sudoku lze využívat veškerých technik jako v klasickém sudoku, jen v případě Unique Rectangle je třeba mít na zřeteli, aby se každá z protilehkých dvojic vrcholů příslušného obdélníku vyskytovala kromě stejného čtverce zároveň ve stejné oblasti.

Rovněž lze uplatnit techniku vyčerpání kandidátů (*caruchying*): Uvažujme, že máme v řádku oblast o dvou políčkách s předepsaným součtem 6, takže možnými kandidáty jsou čísla 1, 2, 4, 5. Ve stejném řádku se rovněž nachází políčko s kandidáty 1, 2. Z ostatních políček v řádku tak můžeme kandidáty 1 a 2 vyloučit. Popsaný příklad lze modifikovat na libovolný blok a libovolnou *ntici* kandidátů.

Tyto techniky pro Killer Sudoku, používané autorkou hlavně při řešení Greater Than Killer Sudoku, dosud nebyly nikde publikovány a budou součástí připravovaného návodu [1].

Greater/Less Sudoku řešíme nalezením vstupního a výstupního uzlu (ve smyslu teorie grafů) v jednotlivých čtvercích a doplňujeme např. všechna čísla 1, 9, 2, 8 atd., až zbývající čísla dořešíme klasickými metodami sudoku.

Poznamenejme rovněž, že geometrické techniky X-Wing a Unique Rectangle nelze využívat u sudoku s deformovanými oblastmi (Irregular Sudoku, Toroidal Sudoku apod).

8 Sudoku z pohledu logika

Kolik je vlastně klasických tabulek celkem? V ohraničeném poli 9×9 je pouze omezené množství variant zadání. Pokud „validnost“ sudoku nebudeme omezovat minimálním počtem nevyplněných políček, lze konstatovat, že existuje přesně

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960$$

zadání klasického sudoku (tj. asi 6,67 triliardy). Pro člověka to znamená, že může luštit celý život a nemusí se bát, že nebude mít co k hraní.

V sudoku používáme přirozenou dedukci, opírající se o zákony výrokové logiky. Jedná se hlavně o zákon vyloučeného třetího (využívá se v podstatě neustále), zákon sporu (Trial and Error, Nishio – spor s existencí – a Unique Rectangle – spor s jednoznačností řešení) a de Morganovy zákony. Metody využívající zákonu sporu nejsou příliš oblíbené a ani tak hojně citovány jako ostatní, zřejmě stále z (přirozeného) intencionistického pohledu. Pokud budeme využívat korektnosti zadání, pak Forcing Chains je metoda ekvivalentní s Trial and Error. V metodě Nishio používáme prakticky důkaz sporem.

U alternativních sudoku s modifikovanými čtverci vystačíme stále ještě se zákony výrokové logiky. U ostatních využíváme již predikátovou logiku 1. řádu, především pak v práci s kvantifikátory, predikáty (Greater/Less Sudoku, Consecutive/Non-Consecutive Sudoku) a funkce (Killer Sudoku, Greater Than Killer Sudoku).

9 Sudoku na internetu

Na závěr uvedeme jen drobný výčet možností hraní sudoku na internetu. Pokud čtenáře následující odkazy nezaujmu, může zadat do Googlu heslo sudoku a získá odkazů nepřeborné množství.

Oblíbenost sudoku je natolik značná, že již můžeme běžně řešit sudoku on-line ([3], [5]), a to nejen klasické, ale i některé alternativy sudoku ([4]). V sudoku se také pořádají nejrůznější soutěže včetně celonárodního každodenního hraní ([8], [3]), mistrovství republiky až po již zmíněné mistrovství světa – zadání soutěžních sudoku z mistrovství světa 2006 lze najít na [6].

Reference

- [1] *GTK snadno a rychle. Návod na luštění* (připravuje se).
- [2] *Daily Killer Sudoku (djape)*.
www.djape.net
- [3] *Fed-Sudoku*.
www.fed-sudoku.eu
- [4] *Killer Sudoku Online*.
www.killersudokuonline.com
- [5] *První český sudoku server*.
sudoku.wz.cz
- [6] *Puzzle Ratings*.
www.puzzleratings.org

-
- [7] *SadMan Software Sudoku.*
<http://www.sadmansoftware.com/sudoku/techniques.htm>
- [8] *Sudoku League.*
www.sudoku-league.com
- [9] *Sudoku Variants.*
<http://www.sachsentext.de/en/>