Eudoxova teorie proporcí

Jindřich Bečvář

Katedra didaktiky matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

10. dubna 2008

becvar@karlin.mff.cuni.cz
www.karlin.mff.cuni.cz/∼becvar
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm

Pátá kniha Eukleidových Základů

1 Nesouměřitelnost

2 Poměr

3 Rovnost poměrů

4 Nerovnost mezi poměry

5 Další definice a věty

6 Dedekindova teorie řezů

Objev nesouměřitelnosti úseček a jeho důsledky

- Původní pýthagorejský pohled na svět čísel a veličin
  - Pýthagorás (570–500 ?) a jeho škola
  - aritmetické pojetí matematiky
    - přirozená čísla a jejich poměry
- Objev nesouměřitelnosti úseček
  - snad přelom 6. a 5. století př. Kr. (kdy?, kdo?)
  - první významný matematický objev
    - existence nesouměřitelných úseček není zjevná
    - důkaz sporem (rozvoj abstrakce, deduktivního myšlení)
  - nevíme, jak vypadal první důkaz
  - nevíme, na jakém objektu k objevu došlo

- Důsledky objevu nesouměřitelnosti úseček
  - přechod od aritmetického pojetí ke geometrickému
    - geometrické veličiny: délky, obsahy a objemy
    - zákon homogenity
  - řecká geometrická algebra
  - zkoumání iracionalit
- Eudoxova teorie proporcí (pátá kniha *Základů*)
  - potřeba nové teorie proporcí
    - teorie poměrů a úměr geometrických veličin
    - nutným předpokladem pro zavedení podobnosti
    - podobnost je v šesté knize *Základů*
  - aritmetická teorie proporcí je v deváté knize *Základů*

- Eudoxos (408–355 ?)
  - teorie proporcí
  - exhaustivní metoda
  - teorie homocentrických sfér (uspořádání vesmíru)
- Eukleides (340–280 ?)
  - *Základy* (300 ?)
  - další dochovaná i nedochovaná díla

Poměr geometrických veličin

První a druhá definice: násobek a díl veličiny

- **1.** Dílem veličiny větší jest veličina menší, když veličinu větší doměřuje.
- **2.** Násobkem pak veličiny menší jest větší, když ji menší doměřuje.

Matematický smysl 1. a 2. definice

Obě definice se týkají vztahu

$$na = b\,,$$

kde a, b jsou veličiny geometrické a n je přirozené číslo.

Třetí a čtvrtá definice: poměr dvou veličin

- **3.** Poměrem jest nějaký vztah dvou stejnorodých veličin dle jejich kolikosti.
- **4.** Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.

Matematický smysl 3. a 4. definice

3. Veličiny a, b musí mít stejnou „dimenzi“ (zákon homogenity).

4. $\exists\, m, n \in \mathbb{N} \qquad na > b\,, \quad mb > a$

Vyloučení nekonečně malých veličin.

V Eukleidových *Základech* je jen jediné místo, kde se vyskytuje nekonečně malá veličina: úhel mezi kružnicí a tečnou je menší než jakýkoli ostrý úhel. (Eukleides III.16)

Axiom Eudoxův, resp. Eudoxův-Archimedův

– Dvě veličiny se nemohou lišit o nekonečně malou veličinu.

– Větší ze dvou daných veličin, ať jsou to úsečky, plochy nebo tělesa, přesahuje menší o jistý rozdíl, který, když je dostatečně vynásoben, je větší než každá z obou daných veličin.

Archimedes: *O kouli a válci*

5. Further, of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with [it and with] one another.

On the sphere and cylinder I., str. 4

Archimedes: *Kvadratura paraboly*

... the following lemma is assumed: that the excess by which the greater of (two) unequal areas exceeds the less can, by being added to itself, be made to exceed any given finite area.

Quadrature of the parabola, str. 234

Rovnost poměrů geometrických veličin – úměra

Pátá a šestá definice: úměra – rovnost dvou poměrů

- **5.** Pravíme, že jsou veličiny v témž poměru k sobě, první ke druhé, a třetí ke čtvrté, když stejné násobky veličiny první a třetí nad stejné násobky druhé a čtvrté jsou dle jakékoli násobnosti buď jeden nad druhý zároveň větší buď zároveň stejné buď zároveň menší, jsouce vzaty ve vzájemném pořádku.
- **6.** Veličiny mající týž poměr nazývejme úměrou (úměrnými).

Matematické vyjádření 5. definice

Poměry $a : b$ a $c : d$ jsou stejné, tj. tvoří úměru $a : b = c : d$, jestliže pro libovolně zvolená přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} na < mb &\iff nc < md\,, \\ na > mb &\iff nc > md\,, \\ na = mb &\iff nc = md\,. \end{aligned}$$

Geometrická představa (pro délky):

– postupné nanášení úseček a, b na jednu polopřímku,

– postupné nanášení úseček c, d na druhou polopřímku,

– na obou polopřímkách jsou pro každou dvojici $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ koncové body ve stejném uspořádání.

Smysl definice úměry

Uvažujme pevně zvolený poměr $a : b$.

Kartézský součin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rozdělme na tři podmnožiny:

$$\begin{aligned} X &= \{(m,n);\; na < mb\}\,, \\ Y &= \{(m,n);\; na > mb\}\,, \\ Z &= \{(m,n);\; na = mb\}\,. \end{aligned}$$

Disjunktní rozklad: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = X \cup Y \cup Z$

Množiny X, Y, Z uzavřeny na „krácení“ a „rozšiřování“, proto můžeme přejít ke kladným racionálním číslům: $(m,n) \longrightarrow \frac{m}{n}$.

Disjunktní rozklad: $\mathbb{Q}^+ = X \cup Y \cup Z$

Platí:

– množina X obsahuje s každým číslem všechna větší čísla z $\mathbb{Q}^+$

– množina Y obsahuje s každým číslem všechna menší čísla z $\mathbb{Q}^+$

– množina Z je nejvýše jednoprvková

– jednoprvková, právě když jsou veličiny a, b souměřitelné

– prázdná, právě když jsou veličiny a, b nesouměřitelné

Závěr:

– poměr $a : b$ definuje rozklad množiny $\mathbb{Q}^+ = X \cup Y \cup Z$

– poměry $a : b$, $c : d$ se rovnají, právě když definují stejný rozklad množiny $\mathbb{Q}^+$ (a pak se jedná o úměru $a : b = c : d$)

Nerovnost mezi poměry

Sedmá definice: nerovnost mezi poměry

- **7.** Když ze stejných násobků násobek veličiny první jest větší než násobek druhé, násobek třetí však není větší než násobek čtvrté, tehdy pravíme, že první ke druhé jest v poměru větším než třetí ke čtvrté.

Matematické vyjádření 7. definice

Definujeme $a : b > c : d$, jestliže pro nějakou dvojici $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je

$$na > mb \quad \text{a} \quad nc \leqq md \ .$$

- Jsou-li veličiny a, b souměřitelné, je $a = mc$, $b = nc$, kde c je jejich společná míra. Pak je $na = mb = nmc$, tj. $\frac{m}{n} \in Z$.

  Poměru $a : b$ přiřadíme racionální číslo $\frac{m}{n}$.

- Jsou-li veličiny a, b nesouměřitelné, je množina Z prázdná, a proto je $\mathbb{Q}^+ = X \cup Y$.

  Jestliže $\frac{m}{n} \in Y$, pak je $a : b > mc : nc$, neboť $na > mb$ a $nmc = mnc$. Je tedy $a : b > mc : nc = \frac{m}{n}$.

  Jestliže $\frac{m}{n} \in X$, je $a : b < mc : nc$, neboť $na < mb$ a $nmc = mnc$. Je tedy $a : b < mc : nc = \frac{m}{n}$.

  Poměr $a : b$ je sevřen množinami X a Y (iracionální číslo).

Zvolme jednotku 1 a uvažujme veličiny souměřitelné, resp. nesouměřitelné s jednotkou 1. Násobky jednotky značme přirozenými čísly, tj. pišme $m \cdot 1 = m$.

- Je-li veličina a souměřitelná s jednotkou, je $na = m$; veličina a je n-tinou veličiny m, tj. $a = \frac{m}{n}$. Veličina a je racionální.

- Je-li veličina a nesouměřitelná s jednotkou, potom poměr $a : 1$ určuje disjuntní rozklad $\mathbb{Q}^+ = X \cup Y$.

  Jestliže $\frac{m}{n} \in Y$, pak je $na > m$ a $a > \frac{m}{n}$.

  Jestliže $\frac{m}{n} \in X$, pak je $na < m$ a $a < \frac{m}{n}$.

  Veličina a je vymezena množinami X a Y. Je iracionální.

- Vymezení iracionalit nerovnostmi:
  - Pýthagorejci: $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$
  - Archimedes: $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}$ $\qquad \frac{265}{153} - \frac{1\,351}{780} = \frac{1}{39\,780}$
  - Archimedes: $\frac{25\,344}{8\,069} < \pi < \frac{29\,376}{9\,347}$
- Bylo možno definovat úměru podmínkou

$$a : b = c : d, \quad \text{právě když} \quad ad = bc\,?$$

  - Jak by to vypadalo pro obsahy a objemy? Dimenze!

Další definice a věty (podle Servíta)

Další definice

- **8.** Úměra o trojím členství jest nejmenší.
- **9.** Když jsou tři veličiny úměrou, pravíme, že se má první ke třetí jako dvojmoc první ke dvojmoci druhé.
- **10.** Když pak jsou čtyři veličiny (spojitě) úměrou, první má se ke čtvrté jako trojmoc první k trojmoci druhé, a tak stále po řadě týmž způsobem, jakoukoli máme úměru.
- **11.** Pravíme, že souhlasnými veličinami (členy) jsou přední s předními a zadní se zadními.
- **12.** Střídavým poměrem je sdružení členu předního s předním a zadního se zadním.

- **13.** Zpětným poměrem je sdružení zadního na místě předním s předním na místě zadním.
- **14.** Součetným poměrem je sdružení předního a spolu zadního se zadním samým.
- **15.** Rozdílovým poměrem jest sdružení rozdílu, oč přední člen je větší zadního, se zadním samým.
- **16.** Zvratným poměrem je sdružení členu prvního s rozdílem, oč přední člen je větší zadního.
- **17.** Stejnořadným poměrem jest, jest-li více členův a jiné jim počtem rovné a berou-li se po dvou v témž poměru, když se má jako v prvních členech první k poslednímu, tak ve druhých členech první k poslednímu; nebo jinak: sdružení krajních s vypuštěním středních.

- **18.** Nestejnořadným poměrem jest, když jsou členy a jiné jim počtem rovné a jako v prvních členech má se přední k zadnímu, tak ve druhých členech přední k zadnímu a jako v prvních členech zadní k jinému, tak ve druhých členech jiný ku přednímu.

Věty (v dnešní symbolice)

- **1.** Jestliže $a_1 = na'_1, \; \ldots, \; a_k = na'_k,$
  potom $a_1 + \cdots + a_k = n(a'_1 + \cdots + a'_k).$
- **2.** Jestliže $a = mb, \; c = md, \; e = nb, \; f = nd,$
  potom $a + e = (m+n)b, \; c + f = (m+n)d.$
- **3.** Jestliže $a = nb, \; c = nd,$
  potom $ma = (mn)b, \; mc = (mn)d.$
- **4.** Jestliže $a : b = c : d$, potom $ma : nb = mc : nd.$
- **5.** Jestliže $a + a' = n(b + b'), \; a' = nb'$, potom $a = nb.$
- **6. – 25.** ...

Dedekindova teorie řezů

Richard Julius Wilhelm **Dedekind (1831–1916)**

– studia v Göttingen (ukončena 1852)
– žák K. F. Gausse (1777–1855) a P. G. L. Dirichleta (1805–1859)
– ovlivněn B. Riemannem (1826–1866)
– 1854 habilitace, 1854–1858 v Göttingen
– 1858–1862 profesorem polytechniky (techniky) v Zürichu
– přednášky, chybí exaktní teorie reálných čísel
– 1862–1894 profesorem techniky v Braunschweigu

– výsledky: teorie algebraických čísel, algebra (tělesa, okruhy, ideály, grupy, svazy, moduly, hyperkomplexní čísla), teorie reálných čísel, axiomatika aritmetiky (1888 – Peanovy axiomy, princip indukce)

- R. Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872, vii+24 stran

  Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Grösse an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Grösse, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen.

Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber daß diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen.

Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. ...

Dies gelang mir am 24. November 1858.

Stetigkeit und irrationale Zahlen, Werke III., str. 315–316

Úvahy, které jsou předmětem tohoto malého spisu, pocházejí z podzimu roku 1858. Byl jsem tehdy jako profesor švýcarské polytechniky v Curychu poprvé v situaci, kdy jsem musel přednášet základy diferenciálního počtu, a pociťoval jsem při tom výrazněji než kdykoliv dříve nedostatečnost skutečně vědeckého založení aritmetiky. U pojmu přibližování proměnné veličiny k pevné limitní hodnotě a zejména při důkazu věty, že každá veličina, která roste, ale nikoli nade všechny meze, se musí blížit k limitní hodnotě, jsem odkazoval na geometrickou názornost.

Také nyní považuji takový názorně geometrický přístup při prvním vyučování diferenciálního počtu z didaktického hlediska za mimořádně potřebný, dokonce za nepostradatelný, když se nechce ztratit příliš mnoho času. Ale že si tento způsob úvodu do diferenciálního počtu nemůže klást žádný nárok na vědeckost, to nebude snad nikdo popírat.

Pro mne byl tehdy tento pocit neuspokojení tak mohutný, že jsem došel k pevnému rozhodnutí, tak dlouho přemýšlet, dokud neobjevím čistě aritmetické a úplně přesné zdůvodnění principů infinitesimálního počtu. …

To se mi podařilo 24. listopadu 1858.

Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke, hervorbringt.

(str. 10)

Rozdělíme-li všechny body přímky do dvou tříd tak, aby každý bod první třídy ležel vlevo od každého bodu druhé třídy, pak existuje právě jediný bod, který toto rozdělení všech bodů do dvou tříd, resp. rozříznutí přímky na dva kusy vytváří.

- R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1888, xix+58 stran

  Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.

  (str. iii)

  Čísla jsou svobodným výtvorem lidského ducha, slouží jako prostředek pro snadnější a ostřejší pochopení rozmanitosti věcí.

- Leopold Kronecker (1823–1891) roku 1886 na schůzi berlínských přírodovědců:

  Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

  Celá čísla vytvořil milý Bůh, všechno ostatní je lidským dílem.

Korespondence R. Lipschitze a R. Dedekinda

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903)

– studia: Königsberg, Berlín (ukončena 1853)

– 1857 habilitace v Berlíně, 5 let v Bonnu

– 1862–1864 profesorem na univerzitě v Breslau (Wrocław)

– od r. 1864 profesorem na univerzitě v Bonnu

– výsledky: analýza, diferenciální rovnice, Fourierovy řady, teorie čísel, vícerozměrná geometrie, mechanika, hydrodynamika, fyzika

- R. Lipschitz:

Bonn, den 8ten Juni 1876

... Ich muss jetzt gestehen, dass ich die Berechtigung Ihrer Definition nicht leugne, dass ich aber der Meinung bin, dieselbe unterscheide sich nur in der Form des Ausdruckes aber nicht in der Sache von dem, was die Alten festgestellt haben. Ich kann nur sagen, dass die von Euclid V,5 aufgestellte Definition, welche ich lateinisch anführe rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo <u>*superare*</u>*, und was folgt, für genau so befriedigend halte, als Ihre Definition. Aus diesem Grunde würde ich wünschen, dass namentlich die Behauptung wegfiele, dass solche Sätze wie* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ *bisher nicht wirklich bewiesen seien.*

(str. 58)

... musím nyní připustit, že oprávněnost Vaší definice nepopírám, že si však myslím, že se liší jen formou výrazu, ale nikoli věcně od toho, k čemu došli staří. Mohu jen říci, že Eukleidem vyslovená Definice V,5, kterou jsem latinsky citoval rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare, a co následuje, považuji za přesně tak uspokojivou, jako Vaši definici. Z tohoto důvodu bych si přál, aby se již nevyskytovala zejména tvrzení, že takové věty, jako $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, dosud nejsou skutečně dokázány.

- R. Dedekind:

Braunschweig, 10 juni 1876

. . . das System aller Schnitte in dem für sich unstetigen Gebiete der rationalen Zahlen bildet eine stetige Mannigfaltigkeit.

(str. 65)

. . . die Euklidischen Principien allein, ohne Zuziehung des Principes der Stetigkeit, welches in ihnen nicht enthalten ist, unfähig sind, eine vollständige Lehre von den reellen Zahlen als den Verhältnissen der Grössen zu begründen; . . .

Umgekehrt aber wird durch meine Theorie der irrationalen Zahlen das vollkommene Muster eines stetigen Gebietes erschaffen, welches eben deshalb fähig ist, jedes Grössen-Verhältniss durch ein bestimmtes in ihm enthaltenes Zahl-Individuum zu charakterisiren.

(str. 68)

... systém všech řezů v nespojitém oboru racionálních čísel tvoří spojitou strukturu.

... samotné Eukleidovy principy, bez připojeného principu spojitosti, který v nich obsažen není, jsou nezpůsobilé se stát základem úplné nauky reálných čísel jako poměrů veličin. ...
Naopak, mojí teorií iracionálních čísel bude vytvořen dokonalý vzor spojitého oboru, který je právě proto způsobilý charakterizovat každý poměr veličin určitým, v něm obsaženým individuálním číslem.

- R. Lipschitz:

Bonn, den 6ten Juli 1876

... Was Sie von der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Principien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann. ...

(str. 73)

Co jste zmínil o úplnosti oboru, která je z Vašich principů vyvozena, tak ta se shoduje ve skutečnosti se základní vlastností čáry, bez níž si nikdo čáru nemůže představit.

- R. Dedekind:

Braunschweig, 27 Juli 1876

… Aber Euklid schweigt vollständig über diesen, für die Arithmetik wichtigsten Punct, und deshalb kann ich Ihrer Ansicht nicht zustimmen, dass bei Euklid die vollständigen Grundlagen für die Theorie der irrationalen Zahlen zu finden seien. …

(str. 78)

Eukleides zcela mlčí o tom, pro aritmetiku nejdůležitějším bodě, a proto nemohu souhlasit s Vaším názorem, že u Eukleida lze nalézt úplné základy teorie iracionálních čísel.

- Eudoxos, Eukleides: pochopení nesouměřitelnosti, existence iracionalit, zařazení konkrétních iracionalit na správná místa mezi čísla racionáloní
- Eudoxos, Eukleides: nedospěli ke spojitosti reálné osy, nevybudovali aritmetiku poměrů, nemohli pochopit vztah mohutností racionálních a iracionálních čísel
- Dedekind: přesně postihnul spojitost, zkonstruoval množinu všech reálných čísel, definoval aritmetické operace

Exaktní teorie reálných čísel

- Georg Cantor (1845–1918)

  – teorie fundamentálních posloupností, spojitost

- Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

  – teorie desetinných řad

- Charles Robert Meray (1835–1911)

  – fiktivní limity konvergentních posloupností (anticipace Cantorovy teorie fundamentálních posloupností)

Česká a slovenská literatura

V. Jarník: *Diferenciální počet I.*, JČM, Praha, 1946
– Dedekindova teorie řezů

K. Hruša: *Elementární aritmetika*, Přírodověd. vyd., Praha, 1953
– Dedekindova teorie řezů

E. Čech: *Čísla a početní výkony*, SNTL, Praha, 1954
– Cantorova teorie fundamentálních posloupností (poprvé česky)

T. Šalát a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika II.*, Alfa, SNTL, Bratislava, Praha, 1986
– Cantorova i Dedekindova teorie (stručně)

J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky II.*,

in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky II, edice Dějiny matematiky, sv. 7, Prometheus, Praha, 1997, 7–28

J. Šimša: *Vývoj představ o reálných číslech*,

in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, sv. 12, Prometheus, Praha, 1999, 259–282

Klasická literatura

Eukleidovy Základy (Elementa) (přeložil František Servít), Jednota českých mathematiků, Praha, 1907

Komentované Eukleidovy *Základy* dostupné v moderních verzích: anglicky, německy, francouzsky, rusky, italsky

The Works of Archimedes (T. L. Heath ed.), Cambridge University Press, 1897, Dover Publications, Inc., 2002

R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und irrationale Zahlen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, 2. vydání: 1969 (anglicky: 1909, 1963, italsky: 1926)

R. Dedekind: *Gesammelte mathematische Werke I, II, III*, Braunschweig, 1930–1932; reprint: Chelsea, 1969 (Vol. III obsahuje obě výše uvedené práce)

R. Lipschitz: *Lehrbuch der Analysis, I. Grundlagen der Analysis, II. Differential- und Integralrechnung*, M. Cohen & Sohn, Bonn, 1877, 1880

R. Lipschitz: *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*, bearbeitet von W. Scharlau, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1986

P. Bachmann: *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen*, Leipzig, 1892

O. Perron: *Irrationalzahlen*, de Gruyter, Berlin, 1921, 2. vydání: 1939, 4. vydání: 1960, Chelsea, New York, 1951

E. Landau: *Grundlagen der Analysis*, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930

G. M. Fichtengol'c: *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija*, Moskva, 1948–1949

I. Niven: *Numbers: Rational and Irrational*, Random House, New York, 1961 (rusky: 1966)

H.-D. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Springer-Verlag, 1983, 1988, 1992 (anglicky: 1995)