Od logiky k teoretické informatice a zpět

Martin Víta

ÚI AV ČR

25.9.2010

Příležitosti ve výuce logiky pro informatiky

- Algoritmické aspekty vykládané látky
- Souvislosti logiky a teoretické informatiky (složitost, teorie grafů a kombinatorické počítání, . . .)

Hlavní cíl příspěvku: zastavení se nad některými tématy základních kurzů logiky a jejich umístění do informatického kontextu

Pojem správně utvořené formule

- Reprezentace formule a jednotlivé notace
- Převody mezi jednotlivými notacemi – souvislost s průchodem stromem, který reprezentuje formuli
- Určení pravdivostní hodnoty formule zapsané v RPN - využití zásobníku

Tabulky pravdivostních hodnot s nadhledem

- Počet řádků tabulky pravdivostních hodnot s n proměnnými
- Průchod rozhodovacím stromem
- Booleovská krychle

Důkazy počítáním

Theorem

Existuje booleovská funkce n proměnných, která se nedá definovat žádnou formulí s méně než $\frac{2^n}{\log_2(n+8)}$ *symboly.*

Důkaz.

1. Uvažujme abecedu s n výrokovými proměnnými, 4 binární spojky, negaci, závorky, mezeru, čili $(n+8)$ symbolů.
2. Horní odhad na počet formulí délky m je tedy $(n+8)^m$.
3. Počet všech booleovských funkcí na n proměnných je 2^{2^n}.
4. Jestliže platí, že $(n+8)^m < 2^{2^n}$, pak existuje booleovská funkce, která se nedá vyjádřit formulí s nejvýše m symboly.
5. Po zlogaritmování získáme nerovnost $m < \frac{2^n}{\log_2(n+8)}$, Q.E.D.

□

Důkazy počítáním II.

Několik poznámek k úvahám předchozího typu

- Chtěli jsme ukázat, že existuje objekt s určitou vlastností. Spočítali jsme, kolik je všech objektů a kolik je těch, které danou vlastnost nemají. Je-li jich méně, musí nutně existovat objekt, který ji má.
- Metoda je nekonstruktivní
- Lze přeformulovat do jazyka teorie pravděpodobnosti: je-li pravděpodobnost toho, že náhodně zvolený objekt má sledovanou vlastnost, nenulová, znamená to, že takový objekt existuje. Výhoda tohoto přístupu: elegantnější vyjádření, možnost použití aparátu teorie pravděpodobnosti.

SAT a jeho varianty

- SAT: problém rozhodnout, zda daná formule v KNF je splnitelná
- 3-SAT: jako SAT, ale každá klauzule obsahuje právě tři literály
- 3-3SAT: jako SAT, ale každá klauzule obsahuje nejvýše tři literály a každá výroková proměnná má v dané formuli nejvýše tři výskyty

Řešení SAT pomocí 3-SAT

Dlouhé disjunkce $a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_k$
nahradíme konjunkcemi
$(a_1 \vee a_2 \vee x) \wedge (\neg x \vee a_3 \vee \cdots \vee a_k)$
Případné "krátké" klauzule doplníme zdvojováním. Formule se prodlouží nejvýše konstanta-krát.
Nově vzniklá formule je splnitelná právě tehdy, když je nová formule splnitelná.

Řešení 3-SAT pomocí 3-3SAT

Každou prvoformuli x_k, která se ve formuli vyskytuje více než 3krát, nahradíme její i-tý výskyt prvoformulí x_k^i. Dále přidáme kojnunkci
$(x_k^1 \vee \neg x_k^2) \wedge (x_k^2 \vee \neg x_k^3) \wedge \cdots \wedge (x_k^{l-1} \vee \neg x_k^l) \wedge (x_k^l \vee \neg x_k^1)$
kde l je počet výskytů prvoformule x_k
Každému ohodnocení prvoformulí, při kterém je původní formule splněna, jednoznačně odpovídá ohodncení prvoformulí nové formule, při kterém je nová formule splněna.